# מועד ב', סמסטר חורף תשפ"ג - אלגברה 1/מ, 104016
**10.3.23**

ת"ז :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

פקולטה :

| |
|---|
| |

- משך המבחן : 3 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רישמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- **מחברות הטיוטה לא יאספו ולא יבדקו.**
- **בשאלות 1-3** יש **לנמק** היטב כל תשובה. **תשובה לא מנומקת לא תחשב**.
  **בשאלות 4-8** יש לסמן את התשובה הנכונה בטבלה שבעמוד זה. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון. אם תסומן יותר מתשובה אחת השאלה תיפסל.
- **אין לתת נימוקים בשאלות 4-8.**
- שאלת ש"ב (המהווה גם 5% מגן) היא 3-א'.

**ב ה צ ל ח ה !**

**טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 4-8**

| | שאלה 4 | שאלה 5 | שאלה 6 | שאלה 7 | שאלה 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| א. | | | | | |
| ב. | | | | | |
| ג. | | | | | |
| ד. | | | | | |
| ה. | | | | | |

**<u>שאלה מס' 1</u>** : (22 נקודות)

תהי $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י:

$$T(p(x))=\begin{pmatrix} p(0) & p'(1) \\ p(0)+p'(1) & 2p'(1) \end{pmatrix}$$

א. (6 נק') מצאו בסיס ומימד לגרעין של $T$.

ב. (6 נק') מצאו בסיס ומימד לתמונה של $T$.

ג. (5 נק') הוכיחו שלא קיימת בתמונה של $T$ מטריצה בעלת עיקבה 0 ודטרמיננטה 1.

ד. (5 נק') יהי $V$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ותהי $S:\mathbb{R}^{2\times 2}\to V$ העתקה לינארית. נתון כי $S\circ T$ היא **על**. הוכיחו כי $\dim(V)\le 2$.

**<u>שאלה מס' 2</u>** : (22 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

א. (4 נק') מצאו את הפולינום האופייני של $A$, את הערכים העצמיים ואת הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ב. (10 נק') הוכיחו כי $A$ לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצאו מטריצה הפיכה $P$ ומטריצה אלכסונית $D$ כך ש $P^{-1}AP=D$.

ג. (4 נק') מצאו סקלר $\alpha\in\mathbb{R}$ המקיים: $A^{10}=\alpha A^{6}$.

ד. (4 נק') תהי $E=A-k\cdot I$. הוכיחו כי לכל $k\in\mathbb{R}$ מתקיים $\det(E)\geq 0$.

**בשאלה זו יש לתת פתרון מלא ובסוף לרכז את התשובות במשבצות המתאימות בסוף השאלה.**

א. פולינום אופייני:

| ע"ע | ר"א | ר"ג |
|---|---|---|
| | | |

ב. $A$ לכסינה כי:

D=

P=

ג.

$\alpha=$

ד. $\det(E)\geq 0$ כי:

**<u>שאלה מס' 3</u>** : (31 נקודות) **סעיף א' בשאלה זו מהווה שאלת ש"ב.**

בשאלה זו 4 סעיפים. הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. (10 נק') תהי $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. אם $\det(A)$ הוא מספר ממשי חיובי, אז $trace(A)$ גם הוא מספר ממשי.

ב. (7 נק') יהי $V$ מרחב וקטורי מעל $F$, ותהי $\{v_1,...,v_k\}$ בלתי תלויה לינארית ב- $V$.

אם $u,w\in V$ מקיימים $u+w\in span\{v_1,...,v_k\}$ אבל $u,w\notin span\{v_1,...,v_k\}$ אז

$\dim\left(span\{v_1,...,v_k,u,w\}\right)=k+1$.

ג. (7 נק') יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד סופי מעל לשדה $F$, ויהיו $T,S:V\to V$ אופרטורים לינאריים. אם $Ker(S)=\{0\}$, אז $\mathrm{Im}(TS)=\mathrm{Im}(T)$.

ד. (7 נק') תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. אם $I-A$ דומה ל- $I+B$, אז $A^2$ דומה ל- $B^2$.

**<u>יש לסמן את התשובה הנכונה לשאלות 4-8 בטבלה שבדף הראשון. נימוקים לא יבדקו.</u>**
**<u>יותר מסימון אחד יגרור ניקוד 0 על השאלה.</u>**

**<u>שאלה מס' 4</u>** : (5 נקודות)

יהיו $z,w\in\mathbb{C}$ לא ממשיים. נסמן $t=i^{2023}(z-\overline{z})(w-\overline{w})$ אזי:

א. $t$ ממשי חיובי.

ב. $t$ ממשי שלילי.

ג. $t$ מדומה טהור.

ד. $t$ לא ממשי ובנוסף, $\mathrm{Re}(t)>0$.

ה. $t=0$.

**<u>שאלה מס' 5</u>** : (5 נקודות)

סמנו את הטענה היחידה שנכונה:

א. לכל מטריצה $A\in\mathbb{R}^{5\times5}$ מתקיים $Col(A)=Row(A)$.

ב. לכל מטריצה $A\in\mathbb{R}^{5\times5}$ מתקיים $Col(A)\cap Row(A)\neq\{0\}$.

ג. קיימת מטריצה $A\in\mathbb{R}^{5\times5}$ כך ש $Col(A)\subset Row(A)$ (הכלה ממש).

ד. קיימת מטריצה $A\in\mathbb{R}^{5\times5}$ כך ש $\mathbb{R}^5=Col(A)+Row(A)$.

ה. כל הטענות האחרות אינן נכונות.

(**הערה**: עבור מטריצה $C$ : $Row(C)$ מסמן את מרחב השורות של $C$, ו- $Col(C)$ את מרחב העמודות).

**<u>שאלה מס' 6</u>** : (5 נקודות)

תהי $A$ מטריצה הפיכה המקיימת $A^tA^{-1}=A^{-1}-A^t$. נסמן: $\det(A)=d$ אז $\det(I+A)$ שווה ל:

א. $d+1$ ; ב. $-d$ ; ג. $d^{-1}$ ; ד. $(d-1)^{-1}$ ; ה. $(-d)^{-1}$.

**<u>שאלה מס' 7</u>** : (5 נקודות)

תהי $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י: $T(p(x))=\alpha xp(x)-x^2p'(x)$,

כאשר $\alpha\in\mathbb{R}$ פרמטר ו- $p'(x)$ היא הנגזרת של $p(x)$. אזי:

א. קיימים אינסוף ערכים של $\alpha$ עבורם $T$ חח"ע.

ב. קיימים אינסוף ערכים של $\alpha$ עבורם $T$ על.

ג. קיים בדיוק ערך אחד של $\alpha$ עבורו $T$ חח"ע.

ד. קיים בדיוק ערך אחד של $\alpha$ עבורו $T$ על.

ה. קיים בדיוק ערך אחד של $\alpha$ עבורו $\dim(\mathrm{Im}T)=1$.

**<u>שאלה מס' 8</u>** : (5 נקודות)

יהי $T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ אופרטור לינארי המוגדר ע"י : $T(A)=A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. אזי :

א. אם $B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ וקטור עצמי של $T$, אז $B$ סימטרית.

ב. אם $B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ וקטור עצמי של $T$, אז $\det(B)=0$.

ג. ל- $T$ יש ערך עצמי $\lambda\neq 1$.

ד. ל- $T$ יש שלושה וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית.

ה. $\dim\left(\operatorname{Im}T\right)=2$.

**דף ריק למקרה הצורך**